Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato V

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: A. Mazzoccoli, M. Nanni

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti notevoli.

$$\circ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{2n} \qquad \circ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!} \qquad \circ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n^n}$$

Esercizio 2. Discutere la convergenza delle seguenti serie utilizzando il criterio del confronto con la serie geometrica.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}}{3^n} \qquad \bullet \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{n^3+n}{n^3}\right)^{4n^3}}{e^n} \qquad \bullet \sum_{n=1}^{+\infty}(\sin(\sin(n!\log n)))^n$$

Esercizio 3. Discutere al variare del parametro $\alpha > 0$ la convergenza delle seguenti serie:

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{2+\alpha}\right)^n \qquad \bullet \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+\alpha}{n+\alpha}\right)^n \qquad \bullet \sum_{n=0}^{+\infty}|\log\alpha|^n$$

Esercizio 4. Si provi per induzione che, considerata $s_n := \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, vale:

$$s_{2^n} \geqslant 1+\frac{n}{2}.$$

Esercizio 5. Dedurre dall'esercizio precedente il comportamento della serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ e usare questo risultato per studiare il comportamento delle seguenti serie:

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \qquad \bullet \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{n+3}{n}\right)^{5n}}{n}$$

Esercizio 6. Per definizione una serie $S_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ si dice telescopica se $a_k = A_{k+1} - A_k$. Le sue somme parziali si possono scrivere come:

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} A_{k+1} - A_k = A_{N+1} - A_1$$

Osservando che $S_N \to_N S_k$, si calcoli esplicitamente il valore delle seguenti serie:

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \qquad \bullet \sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Esercizio 7. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita induttivamente da

$$a_0 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

(i) Provare che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata da 2.
(ii) Studiare il limite della successione.